ACADEMIE DE NANCY-METZ
UNIVERSITE DE NANCY II

I. C. N.

Concours 1986

MATHEMATIQUES

Régime Général

Durée : 4 heures

1er exercice

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de deux couleurs différentes.

On note X la variable aléatoire "nombre de tirages effectués".

Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

(Tous les résultats devront être présentés sous forme de nombres rationnels irréductibles).

2ème exercice

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur I. On se propose de démontrer que $\forall (a, b, c) \in I^3$ vérifiant $a < b < c$, $\exists d \in]a, c[$ tel que :

$$(1) \qquad \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}$$

1) Montrer que la relation (1) est vraie pour toute fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$.

2) Soit f quelconque vérifiant les hypothèses initiales.
Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P(x) de degré $\leqslant 2$ qui coïncide avec f en a, b et c.
Vérifier que P(x) peut s'écrire sous la forme :

$P(x) = A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$, A, B et C étant 3 réels à déterminer.

3) Soit $D(x) = f(x) - P(x)$

a. A l'aide du théorème de Rolle appliqué à la fonction D, puis à la fonction D', démontrer l'existence d'un réel $d \in]a, c[$ tel que $D''(d) = 0$.

b. En déduire la relation (1).

Problème

Notations :

. E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$

. $\mathcal{L}$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E

. $\mathcal{M}$ désigne l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre 3.

. $\mathcal{G}$ désigne le groupe multiplicatif des matrices inversibles de $\mathcal{M}$

. $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble $\{ P \in \mathcal{M} \ / \ P^2 = P \}$

. $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1°) Soit $Q \in \mathcal{G}$. On note φ_Q l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$ définie par :
$\forall M \in \mathcal{M} \quad \varphi_Q(M) = Q M Q^{-1}$

a. Montrer que φ_Q est un isomorphisme d'algèbres, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels et un isomorphisme d'anneaux.

b. Montrer que, $\forall M$ et $M' \in \mathcal{M}$, trace $(M M') =$ trace $(M' M)$. En déduire que, $\forall M \in \mathcal{M}$, trace $(\varphi_Q(M)) =$ trace (M)

2°) Soit $f \in \mathcal{L}$ de matrice $P \in \mathcal{P} - \{0\}$ dans la base $\mathcal{B}$.

a. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ [somme directe].

b. En déduire qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{G}$ et un entier unique $k \in \{1, 2, 3\}$ tels que $P = \varphi_Q(I_k)$

3°) a. Soit D la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vérifier que $D \in \mathcal{P}$

Déterminer une matrice Q de $\mathcal{G}$ et l'entier $k \in \{1, 2, 3\}$ tels que $D = \varphi_Q(I_k)$.

b. En utilisant par exemple les matrices D et I_3, démontrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ n'est pas stable pour le produit.

c. Soit P_1 et $P_2 \in \mathcal{P}$. Démontrer que $P_1 + P_2 \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$. En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}$ n'est pas stable pour l'addition.

4°) Si $P \in \mathcal{P}$, on note $\mathcal{A}(P)$ l'ensemble $\{ M \in \mathcal{M} \ / \ \exists A \in \mathcal{M}, \ M = P A P \}$

a. Vérifier que $\mathcal{A}(P)$ est un sous-groupe additif de $\mathcal{M}$
Vérifier également que $\mathcal{A}(P)$ est stable pour le produit.

b. Démontrer que $\mathcal{A}(P)$ possède un élément neutre pour le produit, que l'on précisera.
En déduire que : $P \neq P' \Leftrightarrow \mathcal{A}(P) \neq \mathcal{A}(P')$

5°) a. Vérifier que $\mathcal{A}(P)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

b. Pour $k \in \{1, 2, 3\}$ déterminer explicitement l'ensemble des matrices M de $\mathcal{A}(I_k)$ par leurs coefficients $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$
Donner la dimension de $\mathcal{A}(I_k)$ en fonction de k.
Pour quels k le produit est-il commutatif dans $\mathcal{A}(I_k)$?

c. Si $P \in \mathcal{P} - \{0\}$, montrer l'existence de $k \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\mathcal{A}(I_k)$ soit isomorphe à $\mathcal{A}(P)$. En déduire la dimension de $\mathcal{A}(P)$ en fonction de trace (P).

d. Pour quels $P \in \mathcal{P} - \{0\}$ l'anneau $\mathcal{A}(P)$ est-il commutatif ?
